ACTES DE LES III TROBADES D'HISTÒRIA DE LA CIÈNCIA I DE LA TÈCNICA
ALS PAÏSOS CATALANS (BARCELONA, SCHCT, 1995), 241-245

J. ZARAGOZÀ I G. CEVA: DOS MATEMÀTICS DEL SEGLE XVII CAPDAVANTERS DE LA GEOMETRIA BARICÈNTRICA

Eduard Recasens Gallart
Departament de Matemàtica Aplicada III. Universitat Politècnica de Catalunya

Paraules clau: *Càlcul baricèntric, centre mínim, centre de gravetat, càlcul de raons*

J. Zaragozà and G. Ceva: two mathematicians of XVII century forerunners of Barycentric Geometry

Abstract: *The use of the Centre of Gravity to obtain some quadratures goes back to Archimedes but the idea of associating weights to points in calculating ratios was introduced by G. Ceva in 1678. In 1674, four years to Ceva's publication, J. Zaragozà, using procedures of geometrical nature, exposed a method similar to Ceva's.*

In this paper the "barycentric procedures" of Zaragoza and Ceva are showed by means of the following geometrical result : A necessary and sufficient condition that lines from the vertices A,E,C of a triangle to points K,B,D on the opposite sides be concurrent is that

$$AD \cdot EK \cdot CB = AB \cdot CK \cdot ED$$

Key words: *Baricentric Calculus, Centrum Minimum, Centre of Gravity, Ratios Calculating*

A la geometria clàssica és ben sabut que perquè les rectes que van des dels vèrtexs A, E, C d'un triangle als punts K, B, D dels costats repectivament oposats siguin concurrents és necessari i suficient que

$$\mathrm{AD} \cdot \mathrm{EK} \cdot \mathrm{CB} = \mathrm{AB} \cdot \mathrm{CK} \cdot \mathrm{ED}$$

Aquest resultat, avui dia, s'atribueix a G. Ceva (Milà 1647, Mantua 1734), no obstant això, J.P. Hogendijk a l'últim Congrés Internacional d'Història de la Ciència (Saragossa, Espanya, agost 1993) ens digué que ja es troba al segle XI demostrat per Al-Mu'taman ibn Hud i en aquesta comunicació veurem com també el demostrà —quatre anys abans que Ceva— el matemàtic J. Zaragozà (Alcalà de Xivert, Castelló de la Plana 1627, Madrid, 1679).

El que m'interessa en aquesta comunicació no és tant la demostració del resultat geomètric anteriorment esmentat —ni tampoc entrar en la qüestió de a qui s'ha d'atribuir— com assenyalar els trets més característics dels mètodes que empraren Zaragozà i Ceva en la seva demostració; ja que és on trobem l'avantprojecte d'allò que serà el càlcul baricèntric introduït per F. Möbius a començaments del segle XIX.

Allò que Ceva utilitza essencialment és que si dos pesos p i q en una balança estan en equilibri respecte al punt g, llavors la raó de segments pg / gq és igual a la raó de pesos q / p. Ja sabem que "la llei de la palanca" havia estat —molts anys abans que ho fes Ceva— emprada sàviament per Arquimedes en l'obtenció d'algunes quadratures, Ceva introduirà un nou grau d'abstracció amb l'associació punt-pes.

Des d'un punt de vista de l'estricta geometria, el mètode de Ceva presenta l'inconvenient d'utilitzar el concepte físic de centre de gravetat i les propietats de l'equilibri estàtic en les seves demostracions. D'això Ceva n'és ben conscient, tant és així que en el llibre on presenta el seu mètode (*De lineis rectis se invicem secantibus : statica constructio, 1678)* en algunes proposicions, junt a la demostració pel seu mètode estàtic hi afegeix una demostració de tipus geomètric —això mateix ho havia fet Arquimedes en algunes de les quadratures en què havia utilitzat la llei de la palanca—.

El fet històricament interessant és que quatre anys abans que Ceva publiqués el seu llibre, es publica a Espanya el llibre *Geometria Magna in Minimis,* (1674) de Josep Zaragozà. En aquesta obra el seu autor introdueix un nou concepte geomètric : "*El centre mínim*". Aquest és l'element de naturalesa geomètrica que permetrà a Zaragozà no haver d'introduir el centre de gravetat en la seva obra que ell vol inclosa en el més pur estil de la geometria d'Euclides.

Al seu llibre, Ceva proposa dos axiomes i un postulat. S'axiomatitza que per a cada sistema de pesos hi haurà un únic centre de gravetat i que es pot substituir uns quants pesos per un altre, el pes del qual és la suma dels pesos que es substitueixen i col·locat en el centre de gravetat d'aquells. En el postulat es diu que donat un pes arbitrari α i una raó arbitrària m / n hi ha un altre pes β tal que

$$\alpha / \beta = m / n.$$

Ceva també utilitza del llibre d'Arquimedes *De l'equilibri dels plans,* la llei de la palanca que es troba a la proposició 6. En una gran part del llibre, Ceva es dedica a calcular certes raons de segments originats en el fet de tallar una figura mitjançant rectes concurrents. És en aquesta part on es troba el que ell anomena "problema VIII" el qual diu així :

Donat el triangle AEC i les raons DA / AB i DE / BC, s'ha de calcular la raó CK / KE (fig. 1)

Ceva resol el problema de la següent manera, diu : pengeu un pes α del vèrtex A i un pes ε del vèrtex E de manera que α / ε = DE / AD i pengeu un pes γ del vèrtex C de manera que α / γ = BC / AB. Amb aquesta assignació de pesos, D és el centre de gravetat de la balança EA i B és el centre de gravetat de la balança AC i per tant, el centre de gravetat dels tres pesos s'ha de trobar a la intersecció de les rectes DC i BE, és a dir, al punt F.

En conseqüència el punt K, que és la projecció del punt F des del vertèx A sobre el costat EC, és el centre de gravetat de la balança EC i per tant, segons la llei de la palanca, s'ha de complir que ε / γ = CK / KE. Ceva se serveix d'aquestes relacions entre pesos i segments per obtenir la raó buscada CK / KE i ho fa utilitzant la composició de raons

$$\frac{CK}{KE} = \frac{\varepsilon}{\gamma} = \frac{\varepsilon}{\alpha}\,\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{AD}{DE}\,\frac{BC}{AB}$$

i és aquí on apareix la relació que avui es coneix com "el teorema de Ceva".

Com hem pogut veure, Ceva utilitza de manera essencial el centre de gravetat i les seves propietats d'equilibri estàtic, el fet és, però, que el centre de gravetat no apareix en cap dels tretze llibres dels Elements d'Euclides, aquest és un concepte aliè a la geometria dels clàssics. És en aquest punt on adquireix especial relleu la *Geometria Magna in Minimis* de J. Zaragozà ja que en ella apareix la definició de "centre mínim", el punt que ha de fer el paper del centre de gravetat. Aquesta Geometria de Zaragoza és un extens tractat format per tres volums i és en les proposicions 35, 36 i 37 del segon volum on es troba el mateix resultat que Ceva publicarà quatre anys més tard. Per a definir el centre mínim cal tenir en compte la següent construcció : Considereu un cert nombre de punts, per exemple A, B, C, sigui P un altre punt i considereu tres rectangles, un de base el segment PA que indicaré per α(PA), un altre de base el segment PB que indicaré per β(PB) i un altre de base el segment PC que indicaré per γ(PC) (fig.2).

Llavors, per a cada punt arbitari X, indicaré amb la notació α(XA) el rectangle que és semblant al α(PA) de manera que els costats XA i PA siguin homòlegs en la semblança i així mateix es defineixen els rectangles β(XB) i γ(XC). Anomenaré "espècie α" la classe dels rectangles que són semblants al rectangle α(PA) i en aquest mateix sentit diré "espècie β" i "espècie γ". Anomenaré "punt-espècie" a un punt donat i tota la classe de rectangles semblants associada.

La definició del centre mínim és com segueix: donats tres (o més) punts-espècie Aα, Bβ, Cγ, per a cada punt arbitrari X es considera la suma de rectangles

$$\alpha(XA) + \beta(XB) + \gamma(XC),$$

llavors, el centre mínim de Aα, Bβ, Cγ és aquell punt M tal que compleix la relació

$$\alpha(MA) + \beta(MB) + \gamma(MC) < \alpha(XA) + \beta(XB) + \gamma(XC).$$

Per qualsevol sistema de punts-espècie Zaragozà dona un mètode constructiu per trobar el seu centre mínim. En el cas particular de ser dos els punts-espècie donats, per exemple els $A\alpha$, $B\beta$ de la fig.3, demostra que el seu centre mínim es troba en aquell punt M del segment AB que fa que els rectangles $\alpha(AM)$ i $\beta(MB)$ tinguin la mateixa altura.

Per veure com Zaragozà treballa amb el centre mínim considerem el triangle AEC de la fig.1 i les rectes AK, EB i CD concurrents en el punt F. Zaragozà associa al vèrtex A l'espècie α dels rectangles quadrats, al vertèx E l'espècie ε dels rectangles que són semblants al rectangle de base DE i altura AD i al vèrtex C l'espècie γ dels rectangles que són semblants al rectangle de base BC i altura AB.

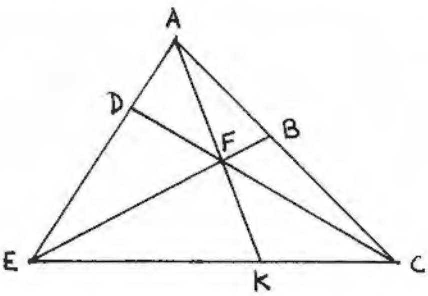

Figura 1. Triangle baricèntric

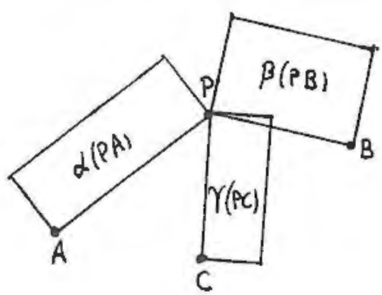

Figura 2. Rectangles-espècies

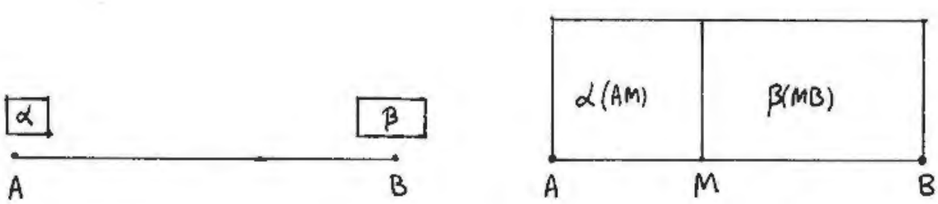

Figura 3. Construcció del *centre mínim*

Amb aquesta assignació d'espècies D és el centre mínim de Aα, Eε i B és el centre mínim de Aα, Cγ. Llavors resulta que F, que és la intersecció de les transversals BE i DC, és el centre mínim dels tres punts-espècie Aα, Eε, Cγ i el punt K, que és la projecció de F des d'A sobre EC, és el centre mínim dels punts-espècie Eε, Cγ (les propietats que permeten fer aquestes últimes afirmacions es troben al llarg del volum 1 de la Geometria de Zaragozà i són demostrades dins el més pur estil de la geometria clàssica).

Llavors, com que K és el centre mínim de Eε, Cγ hi haurà un rectangle de l'espècie ε amb base EK que tindrà la mateixa altura h que un rectangle de l'espècie γ amb base CK i per tant, per la semblança del rectangles d'una espècie donada, s'haurà de complir que

$$\frac{h}{EK} = \frac{AD}{DE} \quad , \quad \frac{h}{KC} = \frac{AB}{BC}$$

D'aquestes relacions resulta d'immediat la igualtat de Ceva.

Ha quedat manifest el paral·lelisme que hi ha entre el mètode demostratiu de Ceva i el de Zaragozà. Allò que per Ceva són pesos per Zaragozà són espècies i el centre de gravetat de Ceva es correspon amb el centre mínim de Zaragozà.

Cal dir que aquestes tècniques baricèntriques de Zaragozà i Ceva foren ignorades pels geòmetres posteriors, així, per exemple, L. Carnot a la *Geometria de Posició* (1803) diu que és molt útil emprar el centre de gravetat i les seves propietats per a demostrar certes proposicions de la geometria ja que els abreuja notablement i que és un llàstima que cap geòmetre encara no ho hagi fet. Anys més tard F. Möbius publica *Der barycentrische Calcul* (Leipzig 1827) on exposa una brillant teoria geomètrico--algebraica del baricentrisme.

Bibliografia

CARNOT, L. (1803), *Géométrie de Position*, París.
CEVA, J. (1678), *De lineis rectis se invicem secantibus: statica contructio*, Milà.
RECASENS, E. (1994), "J. Zaragoza's Centrum Minimum, an early version of Barycentric Geometry", *Archive for History of Exact Sciencies, vol. 46, 4,* 285-320.
ZARAGOZÀ, J. (1674), *Geometria Magna in Minimis*, Toledo.